第 3 讲函数、方程及函数的应用

第 3 讲函数、方程及函数的应用

第 3 讲

主干知识整合

一、函数的零点

1．三个等价关系：方程 $f(x)=0$ **有实根**⇔ 函数 $y=f(x)$ **的图象与 x 轴有交点**⇔ 函数 $y=f(x)$**有零点**.

2．函数零点存在性定理：如果函数 $y=f(x)$**在区间**$[a,b]$**上的图象是连续不断的一条曲线**，并且 $f(a)f(b)<0$，那么函数 $y=f(x)$**在区间**(a,b)内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，**这个** c 也就是方程 $f(x)=0$ **的根**.

(尤其注意，$f(a)f(b)<0$ **是“** 函数 $y=f(x)$**在区间**$[a,b]$**上的图象是连续不断的一条曲线**，那么函数 $y=f(x)$**在区间**(a,b)内有零点**” 的充分不必要条件**)

第 3 讲

主干知识整合

一、函数的零点

1．三个等价关系：方程 $f(x)=0$ **有实根**⇔ 函数 $y=f(x)$ **的图象与 x 轴有交点**⇔ 函数 $y=f(x)$**有零点**.

2．函数零点存在性定理：如果函数 $y=f(x)$**在区间**$[a,b]$**上的图象是连续不断的一条曲线**，并且 $f(a)f(b)<0$，那么函数 $y=f(x)$**在区间**(a,b)内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，**这个** c 也就是方程 $f(x)=0$ **的根**.

(尤其注意，$f(a)f(b)<0$ **是“** 函数 $y=f(x)$**在区间**$[a,b]$**上的图象是连续不断的一条曲线**，那么函数 $y=f(x)$**在区间**(a,b)内有零点**” 的充分不必要条件**)

第 3 讲

二、二分法

1．二分法的条件：函数 $y=f(x)$**在区间**$[a，b]$**上的图象是连续不断的一条曲线**，并且 $f(a)f(b)<0$.

2．二分法的思想：**通过二等分**，无限逼近．

3．**二分法的步骤**：**其中给定精确度** ε **的含义是区间**$(a，b)$**长度**$|a-b|<\varepsilon$，**不能认为是函数零点近似值的精度**．

第 3 讲

二、二分法

1．二分法的条件：函数 $y=f(x)$**在区间**$[a，b]$**上的图象是连续不断的一条曲线**，并且 $f(a)f(b)<0$.

2．二分法的思想：**通过二等分**，无限逼近．

3．**二分法的步骤**：**其中给定精确度** ε **的含义是区间**$(a，b)$**长度**$|a-b|<\varepsilon$，**不能认为是函数零点近似值的精度**．

第 3 讲

三、函数模型及其应用

解决函数模型的实际应用题，首先考虑题目考查的函数模型，并要注意定义域．**其解题步骤是**：

1．**阅读理解**，**审清题意**：**分析出已知什么**，求什么，**从中提炼出相应的数学问题**．

2．**数学建模**：**弄清题目中的已知条件和数量关系**，建立函数关系式．

3．**解函数模型**：利用数学方法得出函数模型的数学**结果**．

4．**实际问题作答**：**将数学问题的结果转译成实际问题作出解答**．

第 3 讲

三、函数模型及其应用

解决函数模型的实际应用题，首先考虑题目考查的函数模型，并要注意定义域．**其解题步骤是**：

1．**阅读理解**，**审清题意**：**分析出已知什么**，求什么，**从中提炼出相应的数学问题**．

2．**数学建模**：**弄清题目中的已知条件和数量关系**，建立函数关系式．

3．**解函数模型**：利用数学方法得出函数模型的数学**结果**．

4．**实际问题作答**：**将数学问题的结果转译成实际问题作出解答**．

第 3 讲

四、二次函数、二次方程、二次不等式的关系

二次函数、二次方程、二次不等式是最基本的知识点，“三个二次型”是一个有机的整体，其中二次函数的图象是联系三者的桥梁和纽带.

第 3 讲

四、二次函数、二次方程、二次不等式的关系

二次函数、二次方程、二次不等式是最基本的知识点，“三个二次型”是一个有机的整体，其中二次函数的图象是联系三者的桥梁和纽带.

第 3 讲

要点热点探究

探究点一　函数零点的判定

例 1 (1)[2010·天津卷] 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是(　　)

A．$(-2,-1)$　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　D．$(1,2)$

(2)[2009·福建卷] 若函数 $f(x)$的零点与 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点之差的绝对值不超过 0.25，则 $f(x)$可以是(　　)

A．$f(x)=4x-1$　B．$f(x)=(x-1)^2$

C．$f(x)=e^x-1$　D．$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}$

第 3 讲

要点热点探究

探究点一　函数零点的判定

例 1 (1)[2010·天津卷] 函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是(　　)

A．$(-2,-1)$　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　D．$(1,2)$

(2)[2009·福建卷] 若函数 $f(x)$的零点与 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点之差的绝对值不超过 0.25，则 $f(x)$可以是(　　)

A．$f(x)=4x-1$　B．$f(x)=(x-1)^2$

C．$f(x)=e^x-1$　D．$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}$

第 3 讲

(1) B (2)A

【解析】 (1)由 $f(-1)=\frac{1}{2}-3<0$，$f(0)=1>0$ 及零点定理知 $f(x)$的零点在区间$(-1,0)$上.

第 3 讲

(1) B (2)A

【解析】 (1)由 $f(-1)=\frac{1}{2}-3<0$，$f(0)=1>0$ 及零点定理知 $f(x)$的零点在区间$(-1,0)$上.

第 3 讲

(2)$f(x)=4x-1$ 的零点为 $x=\frac{1}{4}$，$f(x)=(x-1)^2$ 的零点为 $x=1$，$f(x)=e^x-1$ 的零点为 $x=0$，$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}$的零点为 $x=\frac{3}{2}$. 现在我们来估算 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点，因为 $g(0)=-1$，$g\frac{1}{2}=1$，所以 $g(x)$的零点 $x\in 0,\frac{1}{2}$，又函数 $f(x)$的零点与 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点之差的绝对值不超过 0.25，故可排除 B，D，由二分法进一步计算 $g\frac{1}{4}=\sqrt{2}-\frac{3}{2}<0$，所以 $g(x)$的零点 $x\in\frac{1}{4},\frac{1}{2}$，只有 $f(x)=4x-1$ 的零点适合，故选 A.

第 3 讲

(2)$f(x)=4x-1$ 的零点为 $x=\frac{1}{4}$，$f(x)=(x-1)^2$ 的零点为 $x=1$，$f(x)=e^x-1$ 的零点为 $x=0$，$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}$的零点为 $x=\frac{3}{2}$. 现在我们来估算 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点，因为 $g(0)=-1$，$g\frac{1}{2}=1$，所以 $g(x)$的零点 $x\in 0,\frac{1}{2}$，又函数 $f(x)$的零点与 $g(x)=4^x+2x-2$ 的零点之差的绝对值不超过 0.25，故可排除 B，D，由二分法进一步计算 $g\frac{1}{4}=\sqrt{2}-\frac{3}{2}<0$，所以 $g(x)$的零点 $x\in\frac{1}{4},\frac{1}{2}$，只有 $f(x)=4x-1$ 的零点适合，故选 A.

第 3 讲

【点评】 函数零点附近函数值的符号相反，这类选择题通常采用代入排除的方法求解．**如果要判断函数在给定区间上不存在零点，则只需说明函数图象在此区间上与 x 轴无交点，或者说明函数在此区间上的最大**(小)**值恒小(大)**于零就可以了．**如果想准确判定零点的位置，**那么就**要用二分法**．

第 3 讲

【点评】 函数零点附近函数值的符号相反，这类选择题通常采用代入排除的方法求解．**如果要判断函数在给定区间上不存在零点，则只需说明函数图象在此区间上与 x 轴无交点，或者说明函数在此区间上的最大**(小)**值恒小(大)**于零就可以了．**如果想准确判定零点的位置，**那么就**要用二分法**．

第 3 讲

要点热点探究

探究点二　函数与方程的综合应用

例 2　x_1，x_2 分别是方程 $x\ln x=2010$，$xe^x=2010$ 的根，则下面为定值的是(　　)

A．x_1+x_2　B．x_1-x_2

C．x_1x_2　D．$\frac{x_1}{x_2}$

第 3 讲

要点热点探究

探究点二　函数与方程的综合应用

例 2　x_1，x_2 分别是方程 $x\ln x=2010$，$xe^x=2010$ 的根，则下面为定值的是(　　)

A．x_1+x_2　B．x_1-x_2

C．x_1x_2　D．$\frac{x_1}{x_2}$

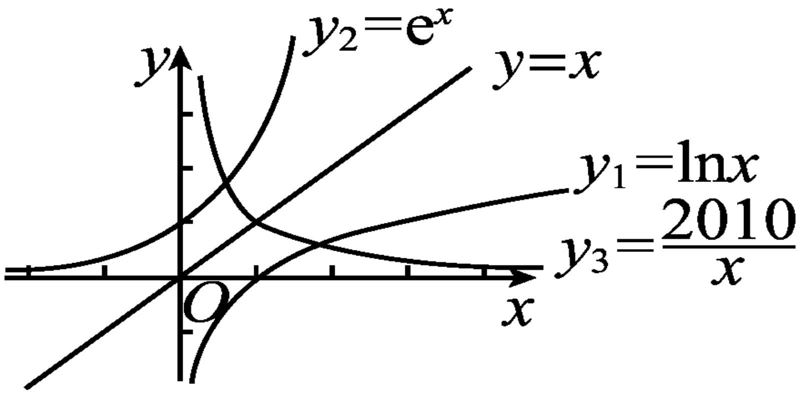
第 3 讲

C 【解析】 由题意 $\ln x=\frac{2010}{x}$，$e^x=\frac{2010}{x}$，令 $y_1=\ln x$，$y_2=e^x$，$y_3=\frac{2010}{x}$.如图，曲线 y_1，y_2，y_3 均关于直线 $y=x$ 对称．设直线 y_3 分别与曲线 y_1，y_2 交于 $A\left(x_1, \frac{2010}{x_1}\right)$，$B\left(x_2, \frac{2010}{x_2}\right)$，则点 A，B 亦关于 $y=x$ 对称，而 $A\left(x_1, \frac{2010}{x_1}\right)$ 关于 $y=x$ 对称点为 $\left(\frac{2010}{x_1}, x_1\right)$，此点即为 $B\left(x_2, \frac{2010}{x_2}\right)$，即 $x_2=\frac{2010}{x_1}$，故选 C.

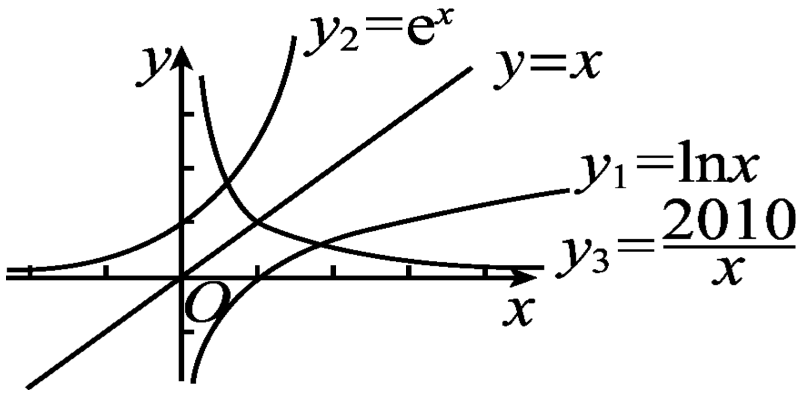
第 3 讲

C 【解析】 由题意 $\ln x=\frac{2010}{x}$，$e^x=\frac{2010}{x}$，令 $y_1=\ln x$，$y_2=e^x$，$y_3=\frac{2010}{x}$.如图，曲线 y_1，y_2，y_3 均关于直线 $y=x$ 对称．设直线 y_3 分别与曲线 y_1，y_2 交于 $A\left(x_1, \frac{2010}{x_1}\right)$，$B\left(x_2, \frac{2010}{x_2}\right)$，则点 A，B 亦关于 $y=x$ 对称，而 $A\left(x_1, \frac{2010}{x_1}\right)$ 关于 $y=x$ 对称点为 $\left(\frac{2010}{x_1}, x_1\right)$，此点即为 $B\left(x_2, \frac{2010}{x_2}\right)$，即 $x_2=\frac{2010}{x_1}$，故选 C.

第 3 讲

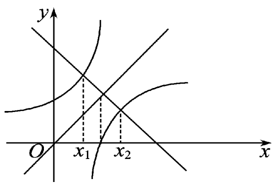

$y_2=e^x$
$y=x$
$y_1=\ln x$
$y_3=\frac{2010}{x}$
y
x
O

第 3 讲


$y_2=e^x$
$y=x$
$y_1=\ln x$
$y_3=\frac{2010}{x}$
y
x
O

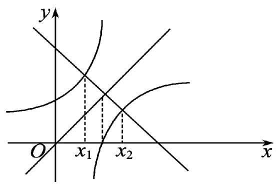
第 3 讲

【点评】　对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 0)$与指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$是互为反函数，它们的图象关于 $y=x$ 对称，本题是通过数形结合法求得的，数形结合，要在结合方面下功夫．利用方程和函数的对应关系，将方程根的问题转化为用图象法研究函数位置关系的问题，是等价转化、方程思想、数形结合思想和方法的具体应用．特别出现超越方程(指对数方程、三角方程)的有关问题，更应当想到利用数形结合法化归为图象位置关系来解决．



第 3 讲

【点评】　对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 0)$与指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$是互为反函数，它们的图象关于 $y=x$ 对称，本题是通过数形结合法求得的，数形结合，要在结合方面下功夫．利用方程和函数的对应关系，将方程根的问题转化为用图象法研究函数位置关系的问题，是等价转化、方程思想、数形结合思想和方法的具体应用．特别出现超越方程(指对数方程、三角方程)的有关问题，更应当想到利用数形结合法化归为图象位置关系来解决．



变式题 已知实数 x_1，x_2 分别是方程 $e^x+x=2$ 与 $\ln x+x=2$ 的根，则 x_1+x_2 的值为________.

2 【解析】 方程 $e^x+x=2$ 与 $\ln x+2=2$ 可化为 $e^x=-x+2$，$\ln x=-x+2$，分别作出 $y=e^x$，$y=\ln x$，$y=-x+2$ 的图象，如图所示：

因为函数 $y=e^x$，$y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，

由 $\begin{cases} y=x, \\ y=-x+2, \end{cases}$ 解得 $x=1$，$\therefore x_1+x_2=2$.

第 3 讲

变式题 已知实数 x_1，x_2 分别是方程 $e^x+x=2$ 与 $\ln x+x=2$ 的根，则 x_1+x_2 的值为________.

2 【解析】 方程 $e^x+x=2$ 与 $\ln x+2=2$ 可化为 $e^x=-x+2$，$\ln x=-x+2$，分别作出 $y=e^x$，$y=\ln x$，$y=-x+2$ 的图象，如图所示：

因为函数 $y=e^x$，$y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，

由 $\begin{cases} y=x, \\ y=-x+2, \end{cases}$ 解得 $x=1$，$\therefore x_1+x_2=2$.

要点热点探究

探究点三　函数模型及其应用

例 3 某生产旅游纪念品的工厂，拟在 2010 年度将进行系列促销活动．经市场调查和测算，该纪念品的年销售量 x 万件与年促销费用 t 万元之间满足 $3-x$ 与 $t+1$ 成反比例．若不搞促销活动，纪念品的年销售量只有 1 万件．已知工厂 2010 年生产纪念品的固定投资为 3 万元，每生产 1 万件纪念品另外需要投资 32 万元．当工厂把每件纪念品的售价定为："年平均每件生产成本的 150%"与"年平均每件所占促销费一半"之和时，则当年的产量和销量相等．(利润＝收入－生产成本－促销费用)

第 3 讲

要点热点探究

探究点三　函数模型及其应用

例 3 某生产旅游纪念品的工厂，拟在 2010 年度将进行系列促销活动．经市场调查和测算，该纪念品的年销售量 x 万件与年促销费用 t 万元之间满足 $3-x$ 与 $t+1$ 成反比例．若不搞促销活动，纪念品的年销售量只有 1 万件．已知工厂 2010 年生产纪念品的固定投资为 3 万元，每生产 1 万件纪念品另外需要投资 32 万元．当工厂把每件纪念品的售价定为："年平均每件生产成本的 150%"与"年平均每件所占促销费一半"之和时，则当年的产量和销量相等．(利润＝收入－生产成本－促销费用)

第 3 讲

(1)求出 x 与 t **所满足的关系式；**

(2)请把该工厂 2010 年的年利润 y **万元表示成促销费** t **万元的函数；**

(3)试问：当 2010 年的促销费投入多少万元时，该工厂的年利润最大？

第 3 讲

(1)求出 x 与 t **所满足的关系式；**

(2)请把该工厂 2010 年的年利润 y **万元表示成促销费** t **万元的函数；**

(3)试问：当 2010 年的促销费投入多少万元时，该工厂的年利润最大？

第 3 讲

【解答】 (1)设比例系数为 $k(k\neq 0)$．由题知，有 $3-x=\frac{k}{t+1}$.

又 $t=0$ 时，$x=1$.

$\therefore 3-1=\frac{k}{0+1}$，解得 $k=2$.

$\therefore x$ 与 t 的关系式是 $x=3-\frac{2}{t+1}(t\geq 0)$．

第 3 讲

【解答】 (1)设比例系数为 $k(k\neq 0)$．由题知，有 $3-x=\frac{k}{t+1}$.

又 $t=0$ 时，$x=1$.

$\therefore 3-1=\frac{k}{0+1}$，解得 $k=2$.

$\therefore x$ 与 t 的关系式是 $x=3-\frac{2}{t+1}(t\geq 0)$．

(2)依据题意，可知工厂生产 x 万件纪念品的生产成本为$(3+32x)$万元，促销费用为 t 万元，则每件纪念品的定价为 $\frac{3+32x}{x}\cdot 150\%+\frac{t}{2x}$元/件.

于是，$y=x\cdot\frac{3+32x}{x}\cdot 150\%+\frac{t}{2x}-(3+32x)-t$，

化简，得 $y=\frac{99}{2}-\frac{32}{t+1}-\frac{t}{2}(t\geq 0)$.

因此，工厂 2010 年的年利润 $y=\frac{99}{2}-\frac{32}{t+1}-\frac{t}{2}(t\geq 0)$万元.

第 3 讲

(2)依据题意，可知工厂生产 x 万件纪念品的生产成本为$(3+32x)$万元，促销费用为 t 万元，则每件纪念品的定价为 $\frac{3+32x}{x}\cdot 150\%+\frac{t}{2x}$元/件.

于是，$y=x\cdot\frac{3+32x}{x}\cdot 150\%+\frac{t}{2x}-(3+32x)-t$，

化简，得 $y=\frac{99}{2}-\frac{32}{t+1}-\frac{t}{2}(t\geq 0)$.

因此，工厂 2010 年的年利润 $y=\frac{99}{2}-\frac{32}{t+1}-\frac{t}{2}(t\geq 0)$万元.

(3)由(2)知，$y=\frac{99}{2}-\frac{32}{t+1}-\frac{t}{2}(t\geq 0)$

$=50-\frac{32}{t+1}+\frac{t+1}{2}\leq 50-2\sqrt{\frac{32}{t+1}\cdot\frac{t+1}{2}}=42$，当$\frac{t+1}{2}=\frac{32}{t+1}$，即 $t=7$ 时，等号成立，所以，当 2010 年的促销费用投入 7 万元时，工厂的年利润最大，最大利润为 42 万元.

第 3 讲

(3)由(2)知，$y=\frac{99}{2}-\frac{32}{t+1}-\frac{t}{2}(t\geq 0)$

$=50-\frac{32}{t+1}+\frac{t+1}{2}\leq 50-2\sqrt{\frac{32}{t+1}\cdot\frac{t+1}{2}}=42$，当$\frac{t+1}{2}=\frac{32}{t+1}$，即 $t=7$ 时，等号成立，所以，当 2010 年的促销费用投入 7 万元时，工厂的年利润最大，最大利润为 42 万元.

第 3 讲

【点评】 关于解决函数的实际应用问题，首先要在阅读上下功夫，一般情况下，应用题文字叙述比较长，要耐心、细心地审清题意，弄清各量之间的关系，再建立函数关系式，然后借助函数的知识求解，解答后再回到实际问题中去．本题中弄清“销量”、“售价”、“生产成本”、“促销费”、“利润”等词的含义后列出函数关系式是解决本题的关键．

第 3 讲

【点评】 关于解决函数的实际应用问题，首先要在阅读上下功夫，一般情况下，应用题文字叙述比较长，要耐心、细心地审清题意，弄清各量之间的关系，再建立函数关系式，然后借助函数的知识求解，解答后再回到实际问题中去．本题中弄清“销量”、“售价”、“生产成本”、“促销费”、“利润”等词的含义后列出函数关系式是解决本题的关键．

第 3 讲

变式题 [2010· 福建卷] 某港口要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上，在小艇出发时，轮船位于港口北偏西 30°且与该港口相距 20 海里的 A 处，并正以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶．假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶，经过 t 小时与轮船相遇．

(1)若希望相遇时小艇的航行距离最小，则小艇航行速度的大小应为多少？

(2)为保证小艇在 30 分钟内(含 30 分钟)能与轮船相遇，试确定小艇航行速度的最小值；

(3)是否存在 v，使得小艇以 v 海里/小时的航行速度行驶，总能有两种不同的航行方向与轮船相遇？若存在，试确定 v 的取值范围；若不存在，请说明理由．

第 3 讲

变式题 [2010· 福建卷] 某港口要将一件重要物品用小艇送到一艘正在航行的轮船上，在小艇出发时，轮船位于港口北偏西 30°且与该港口相距 20 海里的 A 处，并正以 30 海里/小时的航行速度沿正东方向匀速行驶．假设该小艇沿直线方向以 v 海里/小时的航行速度匀速行驶，经过 t 小时与轮船相遇．

(1)若希望相遇时小艇的航行距离最小，则小艇航行速度的大小应为多少？

(2)为保证小艇在 30 分钟内(含 30 分钟)能与轮船相遇，试确定小艇航行速度的最小值；

(3)是否存在 v，使得小艇以 v 海里/小时的航行速度行驶，总能有两种不同的航行方向与轮船相遇？若存在，试确定 v 的取值范围；若不存在，请说明理由．

第 3 讲

【解答】 (1)设相遇时小艇的航行距离为 S 海里，则

$$S=\sqrt{900t^2+400-2\cdot 30t\cdot 20-\cos(90^\circ-30^\circ)}$$

$$=\sqrt{900t^2-600t+400}$$

$$=\sqrt{900\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+300}.$$

故当 $t=\frac{1}{3}$时 $S_{\min}=10\sqrt{3}$，$v=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=30\sqrt{3}$，

即小艇以 $30\sqrt{3}$海里/小时的速度航行，相遇时小艇的航行距离最小.

第 3 讲

【解答】 (1)设相遇时小艇的航行距离为 S 海里，则

$$S=\sqrt{900t^2+400-2\cdot 30t\cdot 20-\cos(90^\circ-30^\circ)}$$

$$=\sqrt{900t^2-600t+400}$$

$$=\sqrt{900\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+300}.$$

故当 $t=\frac{1}{3}$时 $S_{\min}=10\sqrt{3}$，$v=\frac{10\sqrt{3}}{\frac{1}{3}}=30\sqrt{3}$，

即小艇以 $30\sqrt{3}$海里/小时的速度航行，相遇时小艇的航行距离最小.

(2)设小艇与轮船在 B 处相遇．由题意可得：$(vt)^2=20^2+(30t)^2-2\cdot20\cdot30t\cdot\cos(90°-30°)$，

化简得：$v^2=\frac{400}{t^2}-\frac{600}{t}+900=400\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)^2+675$.

由于 $0<t\leq\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{t}\geq 2$.

所以当$\frac{1}{t}=2$ 时，

v 取得最小值 $10\sqrt{13}$，

即小艇航行速度的最小值为 $10\sqrt{13}$海里/小时．

第 3 讲

(2)设小艇与轮船在 B 处相遇．由题意可得：$(vt)^2=20^2+(30t)^2-2\cdot20\cdot30t\cdot\cos(90°-30°)$，

化简得：$v^2=\frac{400}{t^2}-\frac{600}{t}+900=400\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{4}\right)^2+675$.

由于 $0<t\leq\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{t}\geq 2$.

所以当$\frac{1}{t}=2$ 时，

v 取得最小值 $10\sqrt{13}$，

即小艇航行速度的最小值为 $10\sqrt{13}$海里/小时．

(3)由(2)知 $v^2=\frac{400}{t^2}-\frac{600}{t}+900$，设$\frac{1}{t}=u(u>0)$，

于是 $400u^2-600u+900-v^2=0.(*)$

小艇总能有两种不同的航行方向与轮船相遇，等价于方程(*)应有两个不等正根，

即：$\begin{cases}600^2-1600(900-v^2)>0,\\900-v^2>0\end{cases}$ 解得 $15\sqrt{3}<v<30$，

所以，v 的取值范围是$(15\sqrt{3}，30)$.

第 3 讲

(3)由(2)知 $v^2=\frac{400}{t^2}-\frac{600}{t}+900$，设$\frac{1}{t}=u(u>0)$，

于是 $400u^2-600u+900-v^2=0.(*)$

小艇总能有两种不同的航行方向与轮船相遇，等价于方程(*)应有两个不等正根，

即：$\begin{cases}600^2-1600(900-v^2)>0,\\900-v^2>0\end{cases}$ 解得 $15\sqrt{3}<v<30$，

所以，v 的取值范围是$(15\sqrt{3}，30)$.

要点热点探究

探究点四　二次函数零点及二次方程的根

例 4 已知函数 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=a|x-1|$.

(1)若 $|f(x)|=g(x)$ 有两个不同的解，求 a 的值；

(2)若当 $x\in\mathbf{R}$ 时，不等式 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

第 3 讲

要点热点探究

探究点四　二次函数零点及二次方程的根

例 4 已知函数 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=a|x-1|$.

(1)若 $|f(x)|=g(x)$ 有两个不同的解，求 a 的值；

(2)若当 $x\in\mathbf{R}$ 时，不等式 $f(x)\geq g(x)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

第 3 讲

【解答】 (1)方程$|f(x)|=g(x)$，即$|x^2-1|=a|x-1|$，
变形得$|x-1|(|x+1|-a)=0$，

显然，$x=1$ 是该方程的根，从而欲使原方程有两个不同的解，即要求方程$|x+1|=a$，

“有且仅有一个不等于 1 的解”或“有两解,一解为 1，另一解不等于 **1”**

结合图形，得 $a=0$ 或 $a=2$.

第 3 讲

【解答】 (1)方程$|f(x)|=g(x)$，即$|x^2-1|=a|x-1|$，
变形得$|x-1|(|x+1|-a)=0$，

显然，$x=1$ 是该方程的根，从而欲使原方程有两个不同的解，即要求方程$|x+1|=a$，

“有且仅有一个不等于 1 的解”或“有两解,一解为 1，另一解不等于 **1”**

结合图形，得 $a=0$ 或 $a=2$.

第 3 讲

(2)不等式 $f(x)\geq g(x)$对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，
即$(x^2-1)\geq a|x-1|$(*)对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，
① 当 $x=1$ 时，(*)显然成立，此时 $a\in\mathbf{R}$；
② 当 $x\neq 1$ 时，(*)可变形为 $a\leq\frac{x^2-1}{|x-1|}$，令 $\varphi(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}=\begin{cases}x+1(x>1),\\-(x+1)(x<1),\end{cases}$
因为当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>2$；而当 $x<1$ 时，$\varphi(x)>-2$.
所以 $g(x)>-2$，故此时 $a\leq -2$，
综合①②，得所求 a 的取值范围是 $a\leq -2$.

第 3 讲

(2)不等式 $f(x)\geq g(x)$对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，
即$(x^2-1)\geq a|x-1|$(*)对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，
① 当 $x=1$ 时，(*)显然成立，此时 $a\in\mathbf{R}$；
② 当 $x\neq 1$ 时，(*)可变形为 $a\leq\frac{x^2-1}{|x-1|}$，令 $\varphi(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}=\begin{cases}x+1(x>1),\\-(x+1)(x<1),\end{cases}$
因为当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>2$；而当 $x<1$ 时，$\varphi(x)>-2$.
所以 $g(x)>-2$，故此时 $a\leq -2$，
综合①②，得所求 a 的取值范围是 $a\leq -2$.

第 3 讲

【点评】 一次、二次函数是最基本的初等函数，本题在设置上含有绝对值运算，这是该题的一个亮点，(1)中对方程有两个解的等价转化以及(2)中对不等式恒成立转化成求函数的最值，这都是考查的重点，应认真体会、应用.

【点评】 一次、二次函数是最基本的初等函数，本题在设置上含有绝对值运算，这是该题的一个亮点，(1)中对方程有两个解的等价转化以及(2)中对不等式恒成立转化成求函数的最值，这都是考查的重点，应认真体会、应用.

第 3 讲

教师备用题

备选理由：1 是函数零点存在性定理的应用，2 可作为基础训练，3 是二次函数的综合应用，难度较大，可加强能力训练．

1．[2010·上海卷] 若 x_0 是方程式 $\lg x+x=2$ 的解，则 x_0 属于区间(　　)

A．(0,1)　B．(1,1.25)

C．(1.25,1.75)　D．(1.75,2)

【解析】 D　构造函数 $f(x)=\lg x+x-2$，由 $f(1.75)=f\frac{7}{4}=\lg\frac{7}{4}-\frac{1}{4}<0$，$f(2)=\lg 2>0$ 知 x_0 属于区间(1.75,2)．

第 3 讲

教师备用题

备选理由：1 是函数零点存在性定理的应用，2 可作为基础训练，3 是二次函数的综合应用，难度较大，可加强能力训练．

1．[2010·上海卷] 若 x_0 是方程式 $\lg x+x=2$ 的解，则 x_0 属于区间(　　)

A．(0,1)　B．(1,1.25)

C．(1.25,1.75)　D．(1.75,2)

【解析】 D　构造函数 $f(x)=\lg x+x-2$，由 $f(1.75)=f\frac{7}{4}=\lg\frac{7}{4}-\frac{1}{4}<0$，$f(2)=\lg 2>0$ 知 x_0 属于区间(1.75,2)．

第 3 讲

2．［2010·浙江卷］ **设函数 $f(x)=4\sin(2x+1)-x$，则在下列区间中函数 $f(x)$**不存在零点的是**(　　)**

A．[－4，－2]　B．[－2,0]

C．[0,2]　　D．[2,4]

第 3 讲

2．［2010·浙江卷］ **设函数 $f(x)=4\sin(2x+1)-x$，则在下列区间中函数 $f(x)$**不存在零点的是**(　　)**

A．[－4，－2]　B．[－2,0]

C．[0,2]　　D．[2,4]

第 3 讲

【解析】 A　函数在某个区间上不存在零点，不好直接判断，但可以根据三角函数值的情况，结合函数的零点定理进行分析判断函数在那些区间上存在零点，结合排除法找到答案.

$f(0)=4\sin 1>0$，$f(2)=4\sin 5-2$，**由于** $\pi<5<2\pi$，**所以** $\sin 5<0$，**故** $f(2)<0$，**故函数在**$[0,2]$**上存在零点，排除 C**；由于 $f(-1)=4\sin(-1)-1<0$，**故函数在**$[-1,0]$**上存在零点，也在**$[-2,0]$**上存在零点，排除 B**；令 $x=\frac{5\pi-2}{4}\in[2,4]$，**则** $f\frac{5\pi-2}{4}=4\sin\frac{5\pi}{2}-\frac{5\pi-2}{4}=4-\frac{5\pi-2}{4}=\frac{18-5\pi}{4}>0$，**而** $f(2)<0$，**所以函数在**$[2,4]$**上存在零点，排除 D.综合知函数在**$[-4，-2]$**上不存在零点**.

第 3 讲

【解析】 A　函数在某个区间上不存在零点，不好直接判断，但可以根据三角函数值的情况，结合函数的零点定理进行分析判断函数在那些区间上存在零点，结合排除法找到答案.

$f(0)=4\sin 1>0$，$f(2)=4\sin 5-2$，**由于** $\pi<5<2\pi$，**所以** $\sin 5<0$，**故** $f(2)<0$，**故函数在**$[0,2]$**上存在零点，排除 C**；由于 $f(-1)=4\sin(-1)-1<0$，**故函数在**$[-1,0]$**上存在零点，也在**$[-2,0]$**上存在零点，排除 B**；令 $x=\frac{5\pi-2}{4}\in[2,4]$，**则** $f\frac{5\pi-2}{4}=4\sin\frac{5\pi}{2}-\frac{5\pi-2}{4}=4-\frac{5\pi-2}{4}=\frac{18-5\pi}{4}>0$，**而** $f(2)<0$，**所以函数在**$[2,4]$**上存在零点，排除 D.综合知函数在**$[-4，-2]$**上不存在零点**.

第 3 讲

3．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1)若 $f(-1)=0$，试判断函数 $f(x)$的零点个数；

(2)若对∀ x_1，$x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，试证明∃ $x_0\in(x_1，x_2)$，使 $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$成立；

(3)是否存在 a，b，$c\in R$，使 $f(x)$同时满足以下条件：①∀ $x\in R$，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)$的最小值是 0；②∀ $x\in R$，都有 $0\leq f(x)-x\leq\frac{1}{2}(x-1)^2$.若存在，求出 a，b，c 的值；若不存在，请说明理由．

第 3 讲

3．已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1)若 $f(-1)=0$，试判断函数 $f(x)$的零点个数；

(2)若对∀ x_1，$x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，试证明∃ $x_0\in(x_1，x_2)$，使 $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$成立；

(3)是否存在 a，b，$c\in R$，使 $f(x)$同时满足以下条件：①∀ $x\in R$，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)$的最小值是 0；②∀ $x\in R$，都有 $0\leq f(x)-x\leq\frac{1}{2}(x-1)^2$.若存在，求出 a，b，c 的值；若不存在，请说明理由．

第 3 讲

【解答】 (1)∵ $f(-1)=0$，∴ $a-b+c=0$， $b=a+c$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2$.

当 $a=c$ 时，$\Delta=0$，函数 $f(x)$有一个零点；

当 $a\neq c$ 时，$\Delta>0$，函数 $f(x)$有两个零点.

第 3 讲

【解答】 (1)∵ $f(-1)=0$，∴ $a-b+c=0$， $b=a+c$，

∴ $\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2$.

当 $a=c$ 时，$\Delta=0$，函数 $f(x)$有一个零点；

当 $a\neq c$ 时，$\Delta>0$，函数 $f(x)$有两个零点.

(2)令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则

$g(x_1)=f(x_1)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}$,

$g(x_2)=f(x_2)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{2}$,

$\therefore\ g(x_1)\cdot g(x_2)=-\frac{1}{4}[f(x_1)-f(x_2)]^2<0$,

$\because\ f(x_1)\neq f(x_2)$.

$\therefore\ g(x)=0$ 在$(x_1，x_2)$内必有一个实根.

即$\exists\ x_0\in(x_1，x_2)$，使 $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$成立.

第 3 讲

(2)令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则

$g(x_1)=f(x_1)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}$,

$g(x_2)=f(x_2)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{2}$,

$\therefore\ g(x_1)\cdot g(x_2)=-\frac{1}{4}[f(x_1)-f(x_2)]^2<0$,

$\because\ f(x_1)\neq f(x_2)$.

$\therefore\ g(x)=0$ 在$(x_1，x_2)$内必有一个实根.

即$\exists\ x_0\in(x_1，x_2)$，使 $f(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$成立.

第 3 讲

(3)假设 a，b，c 存在，由①知抛物线的对称轴为 $x=-1$，且 $f(x)_{\min}=0$，∴ $-\frac{b}{2a}=-1$，$\frac{4ac-b^2}{4a}=0$，

∴ $b=2a$，$b^2=4ac$，∴ $4a^2=4ac$，∴ $a=c$.

由②知 $\forall x\in \mathbf{R}$，都有 $0\leq f(x)-x\leq \frac{1}{2}(x-1)^2$，

令 $x=1$ 得 $0\leq f(1)-1\leq 0\Rightarrow f(1)-1=0\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow a+b+c=1$，

由 $\begin{cases} a+b+c=1, \\ b=2a, \\ a=c \end{cases}$ 得 $a=c=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，

第 3 讲

(3)假设 a，b，c 存在，由①知抛物线的对称轴为 $x=-1$，且 $f(x)_{\min}=0$，∴ $-\frac{b}{2a}=-1$，$\frac{4ac-b^2}{4a}=0$，

∴ $b=2a$，$b^2=4ac$，∴ $4a^2=4ac$，∴ $a=c$.

由②知 $\forall x\in \mathbf{R}$，都有 $0\leq f(x)-x\leq \frac{1}{2}(x-1)^2$，

令 $x=1$ 得 $0\leq f(1)-1\leq 0\Rightarrow f(1)-1=0\Rightarrow f(1)=1\Rightarrow a+b+c=1$，

由 $\begin{cases} a+b+c=1, \\ b=2a, \\ a=c \end{cases}$ 得 $a=c=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$，

第 3 讲

当 $a=c=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x+1)^2$，其顶点为$(-1,0)$满足条件①，又 $f(x)-x=\frac{1}{4}(x-1)^2$$\forall x\in \mathbf{R}$，都有$0\leq f(x)-x\leq \frac{1}{2}(x-1)^2$，满足条件②.

∴ 存在 a，b，$c\in \mathbf{R}$，使 $f(x)$同时满足条件①、②.

第 3 讲

当 $a=c=\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x+1)^2$，其顶点为$(-1,0)$满足条件①，又 $f(x)-x=\frac{1}{4}(x-1)^2$$\forall x\in \mathbf{R}$，都有$0\leq f(x)-x\leq \frac{1}{2}(x-1)^2$，满足条件②.

∴ 存在 a，b，$c\in \mathbf{R}$，使 $f(x)$同时满足条件①、②.

第 3 讲

规律技巧提炼

1．判断函数的零点，要善于运用“三个转化”，时常将函数的零点问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题，或转化为两个函数图象交点问题．需特别注意的是下面式子是错的：“$f(a)f(b)<0\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点”．

2．对函数零点的考查，通常以函数为载体判断方程根的个数，或以此为背景求参数的范围，此类问题都是利用数形结合，借助函数图象(复杂函数的图象可用导数工具)加以解决.

3．解实际应用题，要注意建模思想、建模方法的应用，可以借助散点图等选取模型，也可以以图表的方式直接寻求变量间的关系建立模型．

4．解“二次型**”问题，要善于借助二次函数的图象．**

第 3 讲

规律技巧提炼

1．判断函数的零点，要善于运用“三个转化”，时常将函数的零点问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题，或转化为两个函数图象交点问题．需特别注意的是下面式子是错的：“$f(a)f(b)<0\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点”．

2．对函数零点的考查，通常以函数为载体判断方程根的个数，或以此为背景求参数的范围，此类问题都是利用数形结合，借助函数图象(复杂函数的图象可用导数工具)加以解决.

3．解实际应用题，要注意建模思想、建模方法的应用，可以借助散点图等选取模型，也可以以图表的方式直接寻求变量间的关系建立模型．

4．解“二次型**”问题，要善于借助二次函数的图象．**